Abszolútértékes és gyökös kifejezések

1) Igazolja, hogy az alábbi négy egyenlet közül az a) és b) jelű egyenletnek pontosan egy megoldása van, a c) és d) jelű egyenletnek viszont nincs megoldása a valós számok halmazán!

a) $\frac{2x^2+x-10}{2^{x-1}-2}=0$ (4 pont)

b) $\sqrt{x+16}+\sqrt{x-9}=5$ (4 pont)

c) $\lg\left(x^2+x-6\right)=\lg\left(1-x^2\right)$ (4 pont)

d) $\sin x-1=\sqrt{\lg\left(\cos^2 x-1{,}5\cos x\right)}$ (4 pont)

2) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

a) $(x-2)\cdot\lg\left(x^2-8\right)=0$ (5 pont)

b) $x^2-|x|=6$ (5 pont)

3) a) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$x^2=|x-6|$ (5 pont)

b) Oldja meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$\left.\begin{array}{l}\lg(x+y)=2\lg x\\ \lg x=\lg 2+\lg(y-1)\end{array}\right\}$$ (9 pont)

4) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3}=2$ (10 pont)

5) a) Mely valós számok elégítik ki az alábbi egyenlőtlenséget?

$(x-1)^3-(x+1)^3>-8$ (4 pont)

b) Az alábbi f és g függvényt is a $[-3;6]$ intervallumon értelmezzük.

$f(x)=\sqrt{x+3}$ és $g(x)=-0{,}5x+2{,}5$.

Ábrázolja közös koordináta-rendszerben az f és g függvényt a $[-3;6]$ intervallumon! Igazolja számítással, hogy a két grafikon metszéspontjának mindkét koordinátája egész szám! (4 pont)

c) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$0{,}5x+\sqrt{x+3}\le 2{,}5$ (6 pont)

6) a) Ábrázolja a derékszögű koordinátarendszerben az $f:[0;5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|$ függvényt! (5 pont)

a) Tekintsük az $\left|(x-2)^2-1\right|=k$ paraméteres egyenletet, ahol k valós paraméter. Vizsgálja a megoldások számát a k paraméter függvényében! (7 pont)

b) Ábrázolja a megoldások számát megadó függvényt a $k\in\,]-6;6[$ intervallumon! (2 pont)

c) Adja meg a c)-beli függvény értékkészletét! (2 pont)

7) Az alábbi három kifejezés mindegyike esetén adja meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a kifejezés értelmezhető!

a) $\cos\left(\log_2\sqrt{x}\right)$ (3 pont)

b) $\sqrt{\log_2(\cos x)}$ (5 pont)

c) $\log_{\sqrt{x}}\left(\cos^2 x\right)$ (5 pont)

8) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\sqrt{x+2}=-x$ (4 pont)

b) $2^{2(x-1)(x+4)}=4^{\frac{x-1}{x+4}} \quad (x\neq -4)$ (7 pont)

9) Jelölje H a $\sqrt{5{,}2-x}\leq 3$ egyenlőtlenség pozitív egész megoldásainak halmazát. Jelölje továbbá B azon pozitív egész b számok halmazát, amelyekre a $\log_b 2^6$ kifejezés értéke is pozitív egész szám. Elemeinek felsorolásával adja meg a H, a B, a $H\cap B$ és a $B\setminus H$ halmazt! (11 pont)

10) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sin x-\cos^2 x=-1$ (6 pont)

b) $\left|x-|x|\right|=2x+1$ (7 pont)

11) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}+\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1}=324$ (6 pont)

b) $\sqrt{6x-24}=\sqrt{2x-7}-1$ (7 pont)

12) Oldja meg az alábbi két egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

a) $\cos x\geq \frac{1}{2}$ (3 pont)

b) $\sqrt{\frac{x}{5}-4}<20$ (4 pont)

c) Hány olyan egész szám van. amelyik gyöke az alábbi egyenlőtlenségnek?
$\log_{0,5}(2x+100)\geq -8$ (7 pont)

13) a) Határozza meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a $\sqrt{x^2-6x+9}$ kifejezés értelmezhető! (2 pont)

b) Ábrázolja a $[-5;8]$ intervallumon értelmezett $f:x\mapsto\sqrt{x^2-6x+9}$ függvényt! (5 pont)

c) Melyik állítás igaz és melyik hamis a fenti függvényre vonatkozóan? Válaszát írja a sor végén lévő téglalapba! (Az indoklást nem kell leírnia.)

A: Az f értékkészlete: $[0;5]$

B: Az f függvény minimumát az $x=-3$ helyen veszi fel.

C: Az f függvény szigorúan monoton nő a $[4;8]$ intervallumon. 3 pont)

A	
B	
C	

d) Határozza meg az $\int_{-3}^{3}\left(x^2-6x+9\right)dx$ értékét! (6 pont)

14) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{-2x+6}=x+1$ (5 pont)

b) $2\log_4 x^2+3\log_4 x^3=\log_4 x^4+\log_4 8^9$ (6 pont)